Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение
«Гимназия №20»

Бондаренко О. В.

Элементы комбинаторики

Методическое пособие для учащихся 9-11 классов

Г.Донской

Оглавление

Введение

На практике часто приходится выбирать из некоторого множества объектов подмножество элементов, обладающих теми или иными свойствами, располагать элементы одного или нескольких множеств в определенном порядке. Например, мастеру приходится распределять различные виды работ между рабочими, агроному – размещать сельскохозяйственные культуры на нескольких полях, офицеру – выбирать из солдат взвода наряд.

Поскольку в таких задачах речь идет о тех или иных комбинациях объектов, их называют комбинаторными задачами. Комбинаторные задачи служат источником различного рода головоломок. Область математики, в которой изучают комбинаторные задачи, называют комбинаторикой. Формулы, полученные в комбинаторике, используются в других математических науках – теории вероятности, задачах оптимизации, информатике. Лишь в начале XX века комбинаторный анализ был признан самостоятельной математической дисциплиной, и лишь в пятидесятых годах его методы внезапно получили многочисленные приложения. Куда бы сейчас не проникла наука, всюду вместо непрерывности обнаруживается дискретность строения окружающего мира (объяснение структуры периодической системы элементов, код ДНК, и т.д).

Общая задача комбинаторики:

Дано:

1) Множество, содержащее m элементов.
2) Способ построения конструкций, содержащих n элементов исходного множества.

Найти: число всевозможных конструкций, построенных указанным способом

Вводные комбинаторные задачи.

Рассмотрим вводные комбинаторные задачи.

Задача 1. Сколько можно составить пятизначных натуральных чисел с помощью цифр 1 и 0, если в запись каждого числа цифра 1 входит ровно 3 раза?

Решение: Будем искать указанные числа перебором, причем так, чтобы не потерять ни одного числа. Проще начать с нахождения мест для двух нулей, так как если места для нулей определены, то три оставшихся места заполняются единицами однозначно.

Зафиксируем один из нулей на втором месте; тогда второй нуль можно зафиксировать на третьем, четвертом или пятом местах. Если теперь один нуль фиксировать на третьем месте, то второй нуль можно записать на четвертом или пятом местах(вариант, когда нули стоят на третьем и втором местах, уже встречался). Наконец, если один из нулей зафиксировать на четвертом месте, то для другого нуля остается только пятое место. Получаем такие 6 чисел:10011,10101, 10110, 11010,11100.

Ответ: 6.

Задача 2. Сколько существует двузначных натуральных чисел, у которых первая цифра больше второй?

Решение: Если первая цифра двузначного числа равна 1, то такое число только одно – 10. Если первая цифра числа равна 2, то таких чисел уже два -20 и 21. Если первая цифра равна 3, то таких чисел уже три -30,31 и 32. И т.д. Наконец, если первая цифра равна 9, то таких двузначных чисел девять – от 90 до98. Следовательно, всего чисел 1+2+3+…+9=45

Ответ:45.

Задача 3. От города А до города В 999 км. Вдоль шоссе, ведущего из А в В, стоят километровые столбы, на которых расстояния от А до В обозначены так:

0	999		1	998		2	997	…	999	0

Сколько среди этих столбов имеется таких, на которых для обозначения обоих расстояний использованы только две различные цифры?

Решение: Сначала подсчитаем число столбов с цифрами 9 и 0:

0-999, 999-0, 9-990, 90-909, 990-9, 909-90, 99-900, 900-99.

Аналогично, столбов с цифрами 8 и 1, 7 и 2, 6 и 3, 5 и 4 будет по 8.

Ответ:8

Задача 4. Докажите, что произведение k-значного натурального числа на n-значное записывается k+n или k+n-1 цифрами.

Решение: Сначала умножим минимальное k-значное число на максимальное n-значное:

$1000...0 \cdot 1000…0=10^{k-1} \cdot 10^{n-1}=10^{k+n-2}=1000…0$.

Следовательно, минимальное количество цифр произведения равно k+n-1.

Теперь умножив максимальное n-значное число и оценим произведение сверху:

$999…9 \cdot 999…9=(10^k-1) \cdot (10^n-1)<10^{k+n}=1000…0$.

Последнее число является минимальным из (k+n+1)-значных чисел. Значит, число цифр произведения в левой части неравенства меньше k+n+1,то есть с учетом предыдущего оно равно k+n или k+n-1.

В том, что количество цифр произведения может быть равным k+n-1, мы уже убедились. Но может ли оно быть равным k+n- количеству цифр одного множителя, сложенного с количеством цифр другого? То, что это возможно, показывает пример 999·99=98901, где произведение трехзначного на двухзначное есть пятизначное.

Задача 5 . Шашка может перемещаться в одном направлении по разделенной на клетка полосе, передвигаясь за один ход либо на соседнюю клетку либо через одну. Сколькими способами она может переместиться на 10 клеток.

Решение: Шашка может переместиться на одну клетку 1 способом, на две – 2, на три – 1+2=3 способами, на четыре – 3+2=5 способами, на пять -3+5=8 и так далее. Фактически образуется последовательность Фибонначи, которая задается реккурентной формулой:

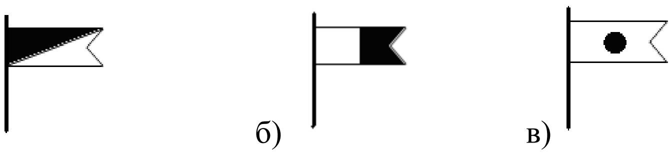
$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$ (n € N, n>2).

Разберем на примерах два основных правила комбинаторики.

Правило суммы: Если некоторый объект А можно выбрать способами, а другой объект В можно выбрать n способами, то какой-либо один из объектов А и В можно выбрать m+n способами.

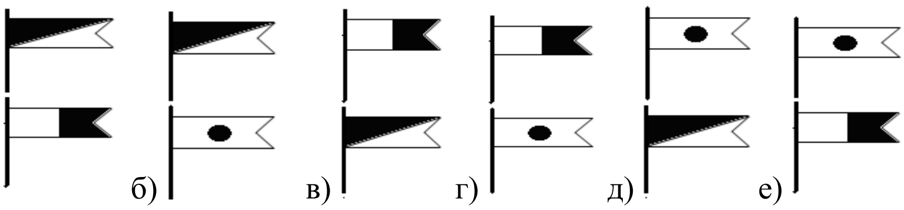
Пример 1. В нашем распоряжении есть три различных флага. На флагштоке поднимается сигнал, содержащий 1, 2 или 3 флага. Сколько различных сигналов можно поднять на флагштоке, если сигналы, поданные одними и теми же флагами, поднятыми в различном порядке, считаются различными?

Ясно, что сигналов, передаваемых одним флагом, 3:



а) б) в)

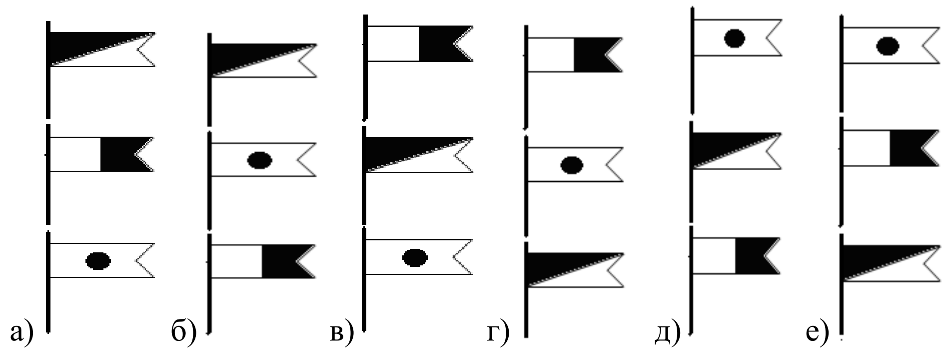
Найдем теперь число сигналов, которые можно передать двумя флагами:



а) б) в) г) д) е)

Мы рассмотрели все возможные сигналы, их 6.

Найдем теперь число сигналов, передающихся тремя флагами.



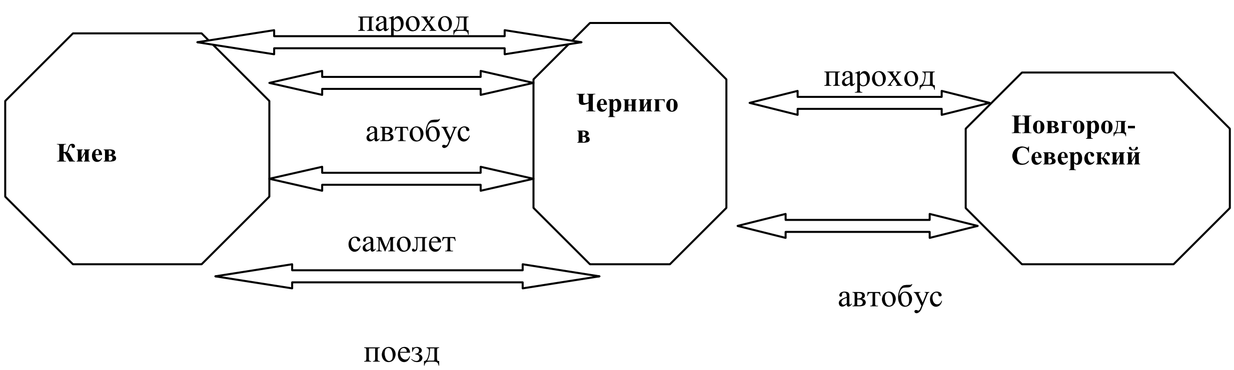
Оказывается, таких сигналов тоже 6. Применяя правило суммы, получим общее число возможных сигналов:

$$3+6+6=15$$

Правило произведения: Если объект А можно выбрать m способами, а после каждого такого выбора объект В можно выбрать n способами, то выбор объектов А и В одновременно можно осуществить $m \cdot n$ способами.

Пример2. Из Киева до Чернигова можно добраться пароходом, поездом, автобусом, самолетом; Из Чернигова до Новгорода-Северского – пароходом и автобусом. Сколькими способами можно осуществить путешествие по маршруту Киев-Чернигов- Новгород-Северский?

Очевидно, число разных путей из Киева до Новгорода-Северского равно 4·2=8, так как, выбрав один из четырех возможных способа продолжить путешествие от Чернигова до Новгорода-Северского.



Задача 6. Дрессировщик выводит на арену цирка трех львов А, Б, В и двух тигров Г и Д и сажает их в ряд на тумбы. При этом тигров нельзя помещать рядом, иначе драка между ними

неизбежна. Сколько всего существует способов размещения зверей?

Решение: Сначала подсчитаем, сколькими способами можно

разместить тигров. Если тигр Г займет первое место, то тигр Д может занять третье, четвертое или пятое место. Если Г займет второе место, то Д можно посадить только на четвертое или пятое место. Если Г поместить на третье или четвертое место, то Д в каждом из этих случаев можно посадить на одно из двух мест. Если Г займет пятое место, то для Д остается одно из трех мест. Значит, число способов, которыми можно посадить пару тигров, равно 3+2+2+2 + 3 = 12.

Займемся размещением львов. Льва А можно посадить на любое из трех мест, оставшихся после размещения тигров; затем льва Б можно посадить на любое из двух оставшихся мест; льву В достанется последнее свободное место. Отсюда· число способов, которыми можно разместить львов, по правилу произведения равно $3\cdot2\cdot1 = 6$.

Следовательно, общее число способов построения зверей на основании того же правила равно $12\cdot6 = 72$.

Ответ: 72.

Задача 7. Докажите, что количество:

а) двузначных натуральных чисел равно 90;

б) трехзначных — 900;

в) четырехзначных — 9000;

г) вообще, n-значных — 9000... 0.

Решение:

а) Двузначное число можно записать в виде xy, где x и y — цифры (в десятичной системе счисления), $X \neq 0$. Так как цифра x принимает 9 значений — от 1 до 9, а цифра y — 10 значений, то упорядоченная пара xy по правилу произведения принимает 9 10 = 90 значений. Задачу можно решить и без правила произведения. Однозначных и двузначных чисел вместе — 99, из них однозначных — 9; следовательно, количество двузначных чисел равно 99-9 = 90.

б) Трехзначное число можно рассматривать как

упорядоченную тройку цифр xyz, где цифра x принимает 9 значений, а цифры y и z — по 10 значений. Отсюда по правилу

произведения количество трехзначных чисел равно $9\cdot10\cdot10 = 900$.

Задача 8. Сколько существует четырехзначных натуральных чисел без повторяющихся цифр, записывающихся только с помощью цифр 1, 2, 3, 4, 5 и 6?

Решение: Четырехзначное число можно представить в виде $xyzt$, где x, y, z, t — цифры. При этом цифра x принимает 6 значений, после нее цифра y — 5 (повторение цифр не допускается), затем цифра z — 4, цифра t — 3. Значит, количество таких четырехзначных чисел равно $6\cdot5\cdot4\cdot3 = 360$. Ответ: 360.

Задача 9. Докажите, что произведение суммы $к$ членов на сумму n членов до приведения подобных членов содержит kn членов.

<u>*Решение*</u>: Любой член произведения можно представить в виде $y\cdot z$, где y — любое слагаемое первой суммы, z — любое слагаемое

второй. Тогда переменная y принимает $к$ значений, переменная z — n значений. Следовательно, число членов разложения равно kn.

Задача 10. На плоскости даны n точек $(n > 3)$, из которых никакие три не лежат на одной прямой. Сколько всего можно провести прямых, каждая из которых проходит через две из данных точек?

Решение: По аналогии с решением предыдущей задачи получается $n(n\text{-}1)$ прямых. Но дело в том, что прямую можно рассматривать, в отличие от вектора, как неупорядоченную пару точек — в том смысле, что прямая AB совпадает с прямой BA. Поэтому при таком подсчете каждая прямая повторяется дважды.

Следовательно, число прямых будет в два раза меньше, чем указано выше, а значит, равно $n(n$ -1)/2

Ответ: $n(n$ - 1)/2

Задача 11. Сколькими способами могут восемь человек стать в очередь к театральной кассе?

<u>*Решение:*</u> Существует 8 мест, которые должны занять 8 человек. На первое место может стать любой из 8 человек, т.е. способов занять первое место – 8. После того, как один человек стал на первое место, осталось 7 мест и 7 человек, которые могут быть на них размещены, т.е. способов занять второе место – семь. Аналогично для третьего, четвертого и т.д. места. Используя принцип умножения, получаем произведение – $8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1$. Такое произведение обозначается как 8! (читается 8 факториал) и называется перестановкой $P_{8.}$

<u>*Ответ*</u>: $P_8 = 8!$

Задача 12. Позывные радиостанции должны начинаться с буквы W. 1) Скольким радиостанциям можно присвоить различные позывные, если позывные состоят из трех букв, причем эти буквы могут повторяться? 2) Если позывные состоят из четырех букв, которые не повторяются?

<u>*Решение:*</u> В современном латинском алфавите 26 букв. На первом месте всегда должна стоять одна буква, следовательно, существует только один способ занять первое место.

1) На оставшиеся два места может претендовать любая из 26-ти букв, т.к. буквы в позывных могут повторяться. Используя принцип умножения, получаем произведение: $1\times26\times26 = 26^{2.}$

2) На второе место можно поставить любую из 25 букв, т.к. в позывных буквы не должны повторяться. На третье место – 24 буквы, на четвертое место – 23 буквы. Используя принцип умножения, получаем произведение: $1\times25\times24\times23$.

Ответ: 1) 26^2; 2) $25\times24\times23$.

Задача 13. В автомашине 7 мест. Сколькими способами семь человек могут усесться в эту машину, если занять место водителя могут только трое из них?

Решение: Действие, которое должно быть выполнено особым способом, необходимо выполнять первым. Итак, на место водителя можно посадить только одного из трех человек (умеющего водить машину), т.е. существуют 3 способа занять первое место. Второе место может занять любой из 6 человек, оставшихся после того, как место водителя будет занято. И т.д. Используя принцип умножения, получаем произведение: $3\times6\times5\times4\times3\times2\times1 = 3\times6! = 3\times P_6$.

Ответ: $3\times P_6 = 3\times6!$.

Задача 14. Алфавит некоторого языка содержит 30 букв. Сколько существует шестибуквенных слов (цепочка букв от пробела до пробела), составленных из букв этого алфавита, если:

1) буквы в словах не повторяются?
2) буквы в словах могут повторяться?

Решение: Существует шесть мест, на которые нужно разместить 30 букв.

1. Буквы не должны повторяться. Используя принцип умножения, получаем произведение: $30\times29\times28\times27\times26\times25$. Такое произведение достаточно сложно использовать в дальнейшем, и информация задачи представлена в ней в скрытой форме. В комбинаторике используют для таких произведений формулу размещений. Чтобы получить формулу размещений, умножим это произведение на единицу, которую представим следующим образом: $30\times29\times28\times27\times26\times25\times\mathbf{1} = 30\times29\times28\times27\times26\times25\times\left(1=\frac{24!}{24!}\right)\frac{\mathbf{24!}}{\mathbf{24!}} = \frac{30\times29\times28\times27\times26\times25\times24!}{24!} = \frac{30!}{24!} = \frac{30!}{(30-6)!} = \mathbf{A}_{30}^{6}$ - *формула для размещений.*

2. Буквы повторяются. Используя принцип умножения, получаем: $30\times30\times30\times30\times30\times30 = 30^6 = \tilde{\mathbf{A}}_{30}^{6}$ – *формула для размещений с повторениями.*

Ответ: 1) A_{30}^{6}; 2) $\tilde{A}_{30}^{6}$.

Задача 15. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 составляются всевозможные числа, каждое из которых содержит не менее трех цифр. Сколько таких чисел можно составить, если повторения цифр в числах запрещены?

Решение: Необходимо посчитать, сколько существует трехзначных, четырехзначных и пятизначных чисел, составленных из этих пяти цифр. Трехзначных чисел - $5\times4\times3 = A_5^3$, четырехзначных – $5\times4\times3\times2 = A_5^4$, пятизначных – $5\times4\times3\times2\times1 = A_5^5$. Используем принцип сложения: $A_5^3 + A_5^4 + A_5^5 = 60 + 120 + 120 = 300$.

Ответ: 300.

Размещение. Сочетание. Перестановки.

Размещения.

Определение: Размещения из m элементов по n называются такие соединения, каждое из которых содержит n элементов, взятых из данных m элементов, причем соединения отличаются одно от другого или элементами, или порядком элементов.

Число размещений из m элементов по n обозначают так:

$$A_m^n$$

Теорема 1: Число всевозможных размещений из m элементов по n равно произведению n последовательных убывающих чисел, из которых большее есть m :

$$A_m^n = m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)$$

Доказательство: Воспользуемся правилом произведения. После того, как первый элемент выбран m способами, второй можно выбрать из оставшихся m-1 элементов m-1 способами. Но тогда пару этих элементов, согласно правилу произведения, можно выбрать m(m-1) способами. Итак, $A_m^2 = m(m-1)$.

Для выбора третьего элемента (при известных первых двух) имеется m-2 возможности, откуда $A_m^3 = m(m-1)(m-2)$ и так далее.

В частности, выбрав n-1 элемент в качестве первых, n-й элемент мы можем выбрать m-(n-1) способами. Тогда $A_m^n = A_m^{ï-1} m(m- п+1)$, откуда

$$A_m^n = m(m-1)\dots(m-n+1)$$

Задача. Научное общество состоит из25 человек. Надо выбрать президента общества, вице-президента, ученого секретаря и казначея. Сколькими способами это можно сделать?

Решение: Так как, всего человек 25, а должностей четыре, то $\grave{A}_{25}^4$

Задача. Из группы в 15 человек выбирают четырех участников эстафеты 800+400+200+100. Сколькими способами можно расставить спортсменов по этапам эстафеты?

Решение: Выберем сначала спортсмена для этапа в 800 м, затем — 400 м, потом — 200 м, наконец, для этапа в 100 м. Так как порядок следования выбранных спортсменов существен, то перед нами размещения — размещения из 15 элементов по 4. Получим:

A_{15}^{4} = 15•14•13•12 = 32 760.

Ответ: 32 760

Задача. Сколько четырехзначных натуральных чисел без повторяющихся цифр, делящихся на 4, можно составить с помощью цифр 1, 2, 3, 4 и 5?

Решение: Вспомним признак делимости на 4: натуральное число делится на 4 тогда и только тогда, когда число, образованное двумя его последними цифрами, делится на 4. В данном случае такое число может оканчиваться лишь на 12, 32, 52 или 24. В каждом из этих четырех случаев две первые цифры четырехзначного числа можно выбрать числом способов, равным A_3. Будем иметь:

$4 \cdot A_{3}^{2} = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$.

Ответ: 24.

Задача. Сколько четырехзначных натуральных чисел с разными цифрами, содержащих цифру 3, можно составить с помощью цифр 0, 1, 2, 3, 4 и 5?

Решение: Пусть сначала в четырехзначном числе цифра 3 стоит на первом месте. Таких чисел будет A_{5}^{3}

Пусть цифра 3 стоит на втором месте. Таких четырехзначных натуральных чисел как будто тоже A_{5}^{3}. Но нужно учесть, что некоторые из них начинаются с нуля. Сколько же "четырехзначных" чисел начинаются с 03? Очевидно, A_{4}^{2} следовательно, в этом случае получаем $A_{5}^{3} - A_{4}^{2}$ чисел. Аналогично, в случаях, когда цифра 3 стоит на третьем или четвертом месте, количество четырехзначных чисел, удовлетворяющих условию задачи, равно каждый раз $A_{5}^{3} - A_{4}^{2}$. В итоге будем иметь:

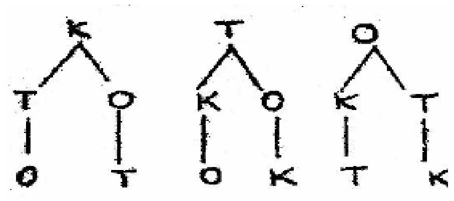
$A_{5}^{3} + 3 \cdot A_{5}^{3} - A_{4}^{2} = 4 \cdot A_{5}^{3} - 3 A_{4}^{2} = 4 \cdot 60 - 3 \cdot 12 = 204$

Ответ: 204.

Перестановки.

Пример: Катя, Оля и Таня подошли к скамейке. Сколькими способами они могут усесться на ней?

Решение: Возьмем заглавные буквы имен девочек. Здесь нужно найти число размещений трех девочек на скамейке по три.



КТО КОТ ТКО ТОК ОТК ОКТ

Девочки могут усесться на скамейке 6 способами.

Если размещения из m элементов взяты по m(а, значит, различаются только порядком элементов), то такие размещения называют *перестановками*.

Определение: Установленный в конечном множестве порядок его элементов называют перестановкой.

Число всевозможных перестановок из m элементов обозначается

$$P_m.$$

Теорема 2. Число всевозможных перестановок из m элементов равно произведению натуральных чисел от 1 до m.

$$P_m=1\cdot2\cdot3\cdot3\cdot\ldots\cdot m=m!$$

Замечание: Произведение вида $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot\ldots\cdot m$ называют факториалом числа m и обозначается m!

Доказательство:

Так как перестановки из m элементов это размещение из m элементов по m, то используя теорему 1, можно получить формулу для числа перестановок

$$P_m=A\frac{m}{m}=m(m-1)(m-2)...(m-m+2)(m-m+1)=m(m-1)(m-2)...2\cdot1=1\cdot2\cdot3...m=m!$$

$P_m=m!$

Пример 1.Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4?

Решение: Используя полученную формулу, получим:

$P_4=4!=1\cdot2\cdot3\cdot4=24$.

Ответ: 24.

Пример 2. Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 3, 4?

Решение: Мы предполагаем, что число не может иметь в качестве первой цифры 0, поэтому все соединения такого вида следует исключить. Таких соединений будет $P_3=3!=1\cdot2\cdot3=6$. Всего комбинаций, использующих данные 4 цифры, $P_4=4!=24$. Поэтому ответ: P_3 - P_4 =18.

Ответ:18.

Задача. Сколько слов можно образовать из букв слова **фрагмент,** если слова должны состоять: (а) из восьми букв, (б) из семи букв, (в) из трех букв?

Решение:

В слове **фрагмент** 8 букв алфавита.

(а) Всевозможные перестановки 8 букв по восьми местам: $\boldsymbol{A}_8^8 = \frac{8!}{(8-8)!} = \frac{8!}{0!} = \frac{8!}{1} = 8! = P_8$.

(б) Размещения 8 букв по 7 местам: $\boldsymbol{A}_8^7$.

(в) Размещения 8 букв по 3 местам: $\boldsymbol{A}_8^3$.

<u>*Ответ*</u>: $\boldsymbol{P_8}$, $\boldsymbol{A}_8^7$, $\boldsymbol{A}_8^3$.

Задача. Сколько существует различных автомобильных номеров, которые состоят из пяти цифр, а) если первая из них не равна нулю; б) если номер состоит из одной буквы латинского алфавита, за которой следуют четыре цифры, отличные от нуля?

Решение:

а) Всего существует 10 цифр. На первом месте не может быть цифры 0, поэтому способов поставить цифру на первое место существует 9. На втором месте может стоять любая из 10-ти цифр (цифры могут повторяться), т.е. способов поставить цифру на второе место существует 10, и т.д. Используя принцип умножения, получаем: $9\times10\times10\times10\times10 = 9\times 10^4 = 9\times\tilde{\boldsymbol{A}}_{10}^4$.

б) На первом месте может стоять любая из 26 букв. На остальных местах - любые из девяти цифр, причем они могут повторяться. Используя принцип умножения, получаем: $26\times9\times9\times9\times9 = 26\times\tilde{\boldsymbol{A}}_9^4$.

<u>*Ответ*</u>: $9\times\tilde{\boldsymbol{A}}_{10}^4$, $26\times\tilde{\boldsymbol{A}}_9^4$.

Задача. Сколькими способами можно расставить на полке семь книг, если (а) две определенные книги должны всегда стоять рядом, (б) эти две книги не должны стоять рядом?

Решение:

(а) Книги, которые должны стоять рядом, считаем за одну книгу. Тогда нужно расставить 6 книг по шести местам. Применяя формулу перестановок, получаем: $P_6 = 6!$. Мы учли перестановки шести книг, не учитывая порядок внутри тех книг, которые мы посчитали за одну. А так как две книги по двум местам можно разместить только двумя способами (P_2), то получаем окончательно следующее произведение: $P_2\times P_6 = 2\times6! = 1440$.

(б) Способов переставить 7 книг существует $P_7 = 7!$. Из них - $2\times6!$ способов поставить определенные книги вместе. Следовательно, способов поставить книги так, чтобы 2 заданные книги не стояли вместе существует: $7! - 2\times6!$.

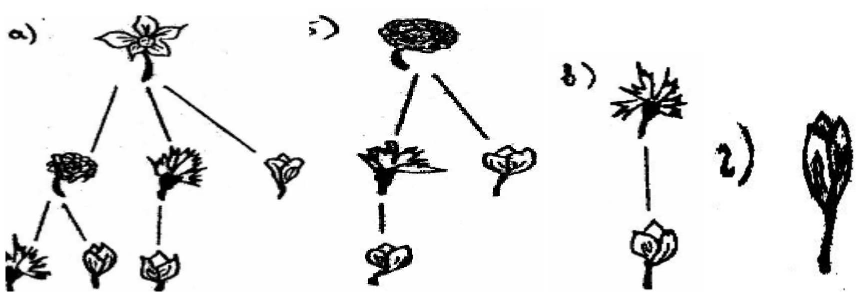
<u>*Ответ*</u>: 1440; . $7! - 2\times6!$

Сочетания.

Если из всех размещений, которые можно составить из m элементов по n, мы отберем только те, которые разнятся одно от другого по крайне мере одним элементом, то получим соединения, которые называются сочетаниями.

Пример. На столе лежат четыре цветка: нарцисс, астра, гвоздика и тюльпан. Сколькими способами может быть составлен букет из трех цветов?

Дадим графовую иллюстрацию решения этой задачи:



Итак, возможны лишь четыре букета:

Определение: Произвольные непорядочные подмножества данного множества называются сочетаниями.

Число сочетаний из m элементов по n обозначается C_m^n.

Теорема 3. Число всех размещений из m элементов по n равно числу всех сочетаний из m элементов по n, умноженному на число всех перестановок, какие можно сделать из n элементов, то есть $A_m^n = C_m^n \cdot P_n$

Следствие 1: $C_m^n = \dfrac{A_m^n}{P_n}$

Следствие 2: $C_m^n = \dfrac{m(m-1)(m-2)...(m-n=1)}{n(n-1)(n-2)...1}$

Используя полученную формулу, можно решение задачи о цветах записать в виде: $C_4^3 = \dfrac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4$

Пример. После отборочных соревнований из 5 кандидатов в сборную, осталось трое. Сколько вариантов такого отбора возможно?

Решение: Согласно условию задачи порядок, в котором завершили соревнования спортсмены, нам не важен. Поэтому ответ: $C_5^3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10$.

Ответ: 10.

Пример. После соревнований трое из пяти спортсменов наградили золотой, бронзовой и серебряной медалями. Сколько вариантов такого награждения возможно?

Решение: Условия примера отличаются от предыдущего тем, что нужно учитывать порядок, в котором завершили соревнования лучше три спортсмена. Поэтому ответ: $A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

Ответ: 60.

На плоскости даны 10 прямых, причем среди них нет параллельных и через каждую точку их пересечения проходят ровно две прямые. Сколько у них точек пересечения?

Каждая точка пересечения определяется парой прямых *a* и b, которые пересекаются в этой точке. Поскольку порядок

следования этих прямых не играет роли, то каждая пара таких прямых есть сочетание — сочетание из 10 элементов по 2. Получаем:

C_{10}^{2}=(10•9)/(1•2)=45.

Ответ: 45.

Задача. Сколько существует шестизначных натуральных чисел, у каждого из которых цифры расположены в порядке возрастания?

Решение: Возьмем девятизначное число 123456789, цифры которого идут в порядке возрастания. Для того чтобы получить какое-либо шестизначное число с тем же свойством, достаточно в этом девятизначном числе вычеркнуть любые три цифры. Так как порядок вычеркиваемых цифр не имеет значения, то перед нами сочетания. Имеем: C_{9}^{3}

=(9•8•7/1•2•3)=84

Ответ: 84.

Задача. На прямой даны 6 точек, а на параллельной ей прямой — 8 точек. Сколько существует треугольников с вершинами в данных точках?

Решение: Сначала подсчитаем число треугольников, у которых две вершины лежат на первой прямой, а одна — на второй:

C_{6}^{2} • C_{8}^{1} =15•8 = 120.

Аналогично подсчитаем число треугольников, у которых одна вершина лежит на первой прямой, а две — на второй:

C_{6}^{1} • C_{8}^{2} = 6•28 = 168.

Получается 120+168 = 288 треугольников.

Ответ: 288.

Задача. Сколькими способами из восьми человек можно избрать комиссию, состоящую из пяти членов?

Решение:

Для решения этой задачи необходимо использовать формулу для сочетания элементов, т.к. здесь не имеет значения порядок элементов в выборке. Запишем формулу для сочетаний и произведем вычисления:

$$\boldsymbol{C}_8^5 = \frac{8!}{(8-5)!\times 5!} = \frac{8!}{3!\times 5!} = \frac{8\times 7\times 6\times 5!}{3!\times 5!} = \frac{8\times 7\times 6}{1\times 2\times 3} = 8\times 7 = 56.$$

<u>*Ответ*</u>: 56.

Задача. Компания из двадцати мужчин разделяется на три группы, в первую из которых входят три человека, во вторую — пять и в третью — двенадцать. Сколькими способами они могут это сделать? (Ответ записать в виде произведения сомножителей, не вычисляя его.)

Решение:

Из 20-ти элементов необходимо сделать три выборки, причем порядок внутри выборок значения не имеет. Поэтому используем формулу для сочетаний. Чтобы выбрать из 20-ти элементов 3, существует $\boldsymbol{C}_{20}^{3}$ способов. Остается 17 элементов, из которых выбирается 5 элементов - $\boldsymbol{C}_{17}^{5}$ способами. Остается 12 элементов, из которых выбирается 12 элементов. Это можно сделать $\boldsymbol{C}_{12}^{12}$= 1, т.е. одним способом. Используя принцип произведения, получаем: $\boldsymbol{C}_{20}^{3}\times \boldsymbol{C}_{17}^{5}\times \boldsymbol{C}_{12}^{12}$.

<u>*Ответ*</u>: $\boldsymbol{C}_{20}^{3}\times \boldsymbol{C}_{17}^{5}\times \boldsymbol{C}_{12}^{12}$.

Задача. Сколькими способами можно отобрать несколько фруктов из семи яблок, четырех лимонов и девяти апельсинов? (Мы считаем, что фрукты одного вида неразличимы.)

Решение:

Т.к. фрукты одного вида неразличимы, то существует один способ взять одно яблоко, один способ взять 2 яблока, один способ взять три яблока и т.д., т.е. всего семь способов выбрать несколько яблок (несколько – это не менее одного). Необходимо также прибавить один способ не взять ни одного яблока. Следовательно, существует 8 способов взять яблоки. Аналогично существует 5 способов выбрать лимоны и 10 способов выбрать апельсины. Следуя принципу умножения, получим все способы отбора фруктов: $7\times 5\times 10$. Но среди этих способов существует один способ, когда не выбирается ни один фрукт. Следовательно, решением данной задачи будет следующее выражение: $7\times 5\times 10$ – 1 = 349.

<u>*Ответ*</u>: 349.

Задача. Сколько четырехбуквенных слов можно образовать из букв слова ***сапфир****?* 2)

Сколько среди них таких, которые не содержат буквы ***р***? 3) Сколько таких, которые начинаются с буквы ***с*** и оканчиваются буквой ***р***?

Решение:

1. Из шести букв составляются четырехбуквенные слова, причем порядок букв важен для образования новых слов. Поэтому используется формула для размещений: $\mathbf{A}_6^4 = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6!}{2!} = \frac{6\times5\times4\times3\times2!}{2!} = 6\times5\times4\times3 = 360$.
2. Необходимо исключить букву **р** из рассмотрения. Количество слов, не содержащих эту букву: $\mathbf{A}_5^4 = \frac{5!}{(5-4)!} = \frac{5!}{1!} = 120$.
3. На первое место поставить букву **с** можно только одним способом. На последнее место поставить букву **р** можно тоже только одним способом. Остаются 4 буквы, которые необходимо разместить по двум местам: $\mathbf{A}_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = \frac{4\times3\times2!}{2!} = 12$.

Ответ: 360, 120, 12.

Задача. Сколько пятибуквенных слов, каждое из которых состоит из трех согласных и двух гласных, можно образовать из букв слова ***уравнение***?

Решение:

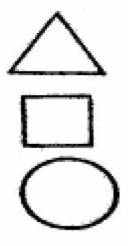
В слове **уравнение** 3 согласных и 4 гласных буквы русского алфавита. Чтобы посчитать количество требуемых пятибуквенных слов, необходимо посчитать количество сочетаний 3 согласных из 3-х заданных и двух гласных из четырех заданных: $\boldsymbol{C}_3^3$ и $\boldsymbol{C}_4^2$. После того, как 5 букв выбраны, необходимо посчитать все возможные перестановки этих букв: $\boldsymbol{C}_3^3 \times \boldsymbol{C}_4^2 \times \boldsymbol{P}_5$.

Ответ: $\boldsymbol{C}_3^3 \times \boldsymbol{C}_4^2 \times \boldsymbol{P}_5$.

Соединения с повторениями.

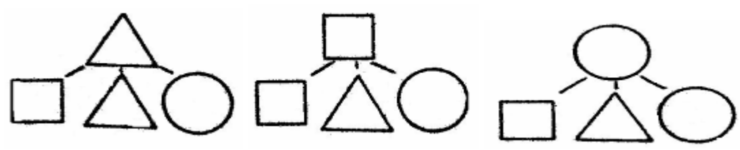
Рассмотренные выше три вида соединений относятся к соединениям без повторений. Кроме соединений без повторений существуют соединения с повторениями.

Размещения с повторениями.



Пример. Даны треугольники, квадраты и окружности. Сколько можно составить всевозможных расстановок по 3 фигуры в каждом? При этом в расстановки могут входить и фигуры одного вида, а две расстановки считаются различными, если они отличаются друг от друга или видом входящих в них фигур, или порядком этих фигур.

Построим граф:



Получим девять пар:

Будем обозначать число размещений из m элементов по n с повторениями A_m^n. Можно доказать, что: $A_m^n = m^n$.

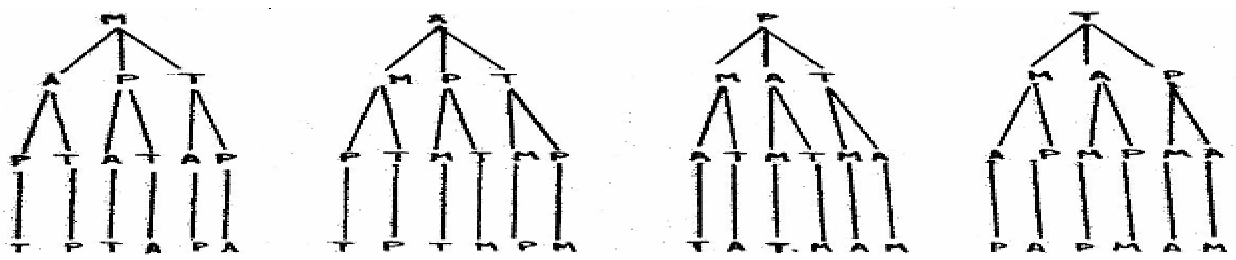
Пример. Пусть на диск сейфа нанесено 12 букв, а секретное слово состоит из 5 букв. Сколько неудачных попыток может быть сделано человеком, не знающего секретного кода?

Решение: Число комбинаций равно 12^5=248832. Значит, неудачных попыток будет 248831 .

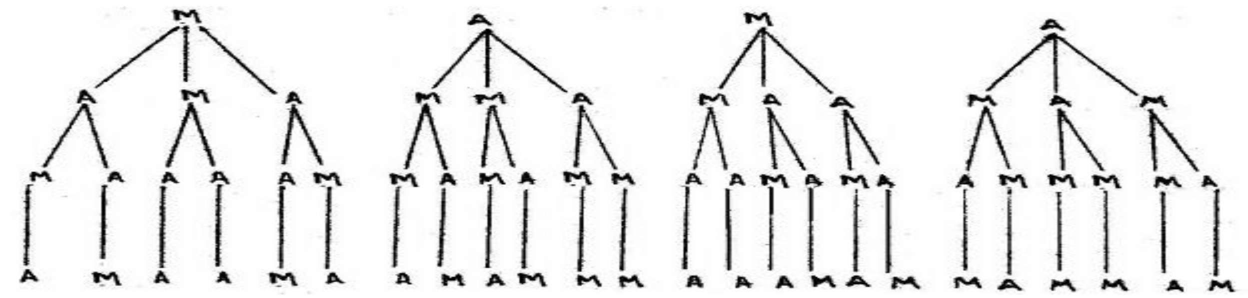
Ответ:248831.

Перестановки с повторениями

До сих пор мы переставляли предметы, которые были попарно различны. Если же некоторые переставляемые предметы одинаковы, то часть перестановок совпадают друг с другом. Например, переставляя буквы слова «МАРТ», мы получим различные перестановки:



А если вместо слова «МАРТ» поставить слово «МАМА», то некоторые перестановки окажутся одинаковыми, так как буквы М и А повторяются.



Обозначим число перестановок с повторениями Р. Можно доказать, что:

$$P(m_1, m_2, ..., m_k) = \frac{m!}{m_1! m_2! ... m_k!}$$, где $m_1+m_2+m_3+\ldots+m_k=m$.

Значит, из букв слова «МАМА» можно сделать $P(2,2) = \frac{4!}{2!2!} = 6$ перестановок.

Пример. Сколько различных десятичных чисел можно получить, используя в их написании цифры 2,2,3,3,3.4,4,4,5,5?

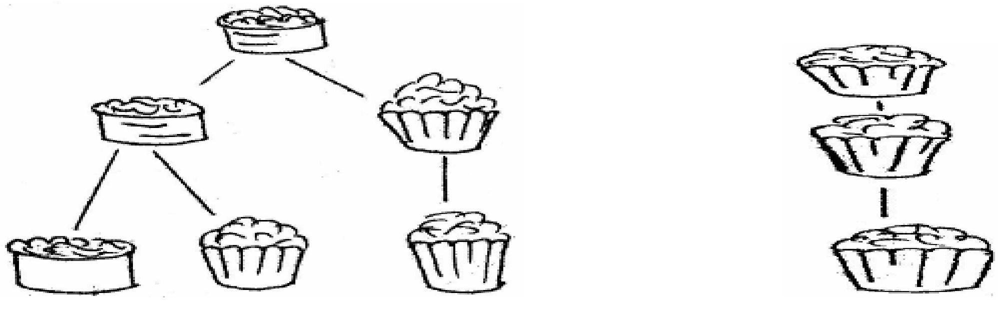
Решение: Здесь две двойки, 3 тройки, 3 четверки и 2 пятерки. Поэтому $P(2,3,3,2) = \frac{10!}{2!3!3!2!} = 25200$.

Ответ: 25200.

Сочетания с повторениями.

Пример. Сколькими способами можно выбрать в кондитерском магазине 3 пирожных, если имеется 2 сорта их (например, бисквитные и корзиночки)?

Построим граф:



БББ, ББК, БКК, ККК.

Число сочетаний с повторениями обозначается $\bar{C}_m^n$. Можно доказать, что $\bar{C}_m^n = C_{m+n-1}^n$

В нашей задаче: $\bar{C}_2^3 = C_{2+3-1}^3 = 4$.

Пример. В киоске продавались воздушные шарики 4 цветов: зеленые, красные, синие и желтые. Сколькими способами можно образовать связку из семи шариков?

Решение: $\bar{C}_4^7 = C_{4+7-1}^7 = C_{10}^7 = 120$.

Итак, связку из семи шариков можно образовать 120 способами.

Задача. Сколько различных перестановок можно образовать изо всех букв слова ***перестановка***? Сколько из них начинается с буквы ***п*** и оканчивается буквой **а**?

Решение :

В слове **перестановка** 12 букв, из них повторяются 2 буквы **е** и две буквы **а**. Число перестановок из 12 элементов вычисляется с помощью формулы P_{12}. Но среди этих перестановок будут повторяющиеся, в которых буквы **е** или, **а** меняются местами. Чтобы не считать такие перестановки, используется формула для перестановок с повторениями:

$$\tilde{P}_{2,2}^{12} = \frac{12!}{2!\times 2!} = \frac{12\times 11!}{4} = 3\times 11!.$$

Чтобы посчитать количество перестановок, начинающихся на букву **п** и оканчивающихся на букву **а**, необходимо исключить эти элементы и места, на которых они стоят из рассмотрения. Остается 10 букв и десять мест, причем остается только одна повторяющаяся буква **е**. Применяем формулу для перестановок с повторениями:

$$\tilde{P}_{2}^{10} = \frac{10!}{2!} = \frac{10\times 9!}{2} = 5\times 9!.$$

Вычисление вероятностей сложных событий с помощью формул комбинаторики.

Пусть в лотерее, где разыгрывается 10 билетов, принимает участие несколько человек. На каждом билете пишется имя одного из участников, после чего все билеты тщательно перемешиваются. Затем наугад выбирают один билет, и тот, чье имя записано на билете, получает приз. Спрашивается, каковы шансы получить приз некоторому участнику лотерее? Если имя этого участника написано только на одном билете, то у него один шанс из 10. Если на двух, то два из десяти и так далее.

Извлечение любого билета с именем этого участника считается благоприятным исходом. Число таких исходов, очевидно, совпадает с числом билетов, на которых написано его имя. Шансы данного участника на выигрыш будут определяться долей благоприятных исходов среди всех равновозможных исходов эксперимента. Для того чтобы найти эту долю, требуется число благоприятных исходов разделить на число всех исходов эксперимента.

При многократном проведении эксперимента его результаты показывают, что отношение чисел исходов, при которых данный участник выигрывает, к числу всех исходов эксперимента оказывается близким к доле тех билетов, на которых написано имя участника, среди всех билетов, разыгрываемых в лотерее. Поэтому вероятность выигрыша естественно считать отношение числа благоприятных исходов к числу всех возможных исходов эксперимента.

Подойдем теперь к понятию вероятности более формально. Для этого введем следующее определение: будем называть *элементарным событием* любой из равновозможных исходов эксперимента (в приведенном выше примере элементарным исходом будет извлечение одного из билетов). Множество всех равновозможных исходов назовем *пространством элементарных событий*, а каждое элементарное событие – *точкой* этого пространства (приведенном выше примере пространство элементарных событий состоит из десяти точек).

Совокупность элементарных событий, объединяющие все те исходы, при которых происходит событие А, называют *множеством элементарных событий, благоприятных событий* В. Вероятностью события А называют отношение числа благоприятных ему элементарных событий к числу всех возможных элементарных событий. Если число исходов, благоприятных событию А, равно m, а число всех точек, составляющих пространство элементарных событий, равно n, то вероятность P(A) события А выразиться дробью P(A)=m/n.

В задачах, где число всех возможных элементарных событий конечно, число элементарных событий, благоприятных событию А, может быть найдено непосредственно.

Пример 1. В классе, состоящем из 20 учеников, 15 человек занимается в математическом кружке. Какова вероятность, что наудачу выбранный ученик окажется членом математического кружка?

Решение: Пусть событие А состоит в том, что наудачу выбранный ученик является членом математического кружка. Тогда число элементарных событий благоприятных событию А, равно 15. Число всех элементарных событий в данном случае равно 20. следовательно, искомая вероятность равна Р(А)=15⁄20=3⁄ 4.

Ответ: 3⁄4.

Пример 2. Бросают две игральные кости. Какое событие более вероятно: сумма очков на выпавших гранях равна11 или сумма очков на выпавших гранях равна 4?

Решение: Поставим в соответствие исходу эксперимента упорядоченную пару чисел (x,y), где x означает число очков, выпавших на первой кости, а y- на второй. Пространство всех элементарных событий состоит из множества пар (x,y), где x и y принимают значения от 1 до 6. число таких пар равно 36. Событию А, состоящему в том, что сумма очков, выпавших на двух костях, равна 11, благоприятны два элементарных события, которым соответствуют пары (6,5) и (5,6) . Событию В, состоящему в том, что сумма очков, выпавшее на двух костях равна 4, благоприятны три элементарных события, которым соответствуют пары (1,3), (3,1) и (2,2).

Вероятности событий А и В равны соответственно Р(А)=2/36=1/18 и Р(ВВ)=3/36=1/12, и, следовательно, событие В более вероятно.

Пример 3. Найти вероятность того, что все учащиеся в группе, состоящей из 40 человек, родились в разные дни года.

Решение: Все возможные исходы эксперимента представляются различными выборками по 40 из исходного множества объема 365.При этом выборка может содержать одинаковые элементы (так как любой день может быть днем рождения нескольких человек). Следовательно, пространство элементарных событий содержит $(40)^{365}$ различных выборок. Благоприятным событием будут соответствовать выборки, не содержащие одинаковых элементов. Таких выборок $\grave{A}_{365}^{40}$. Таким образом, искомая вероятность равна $Ð(\grave{A}) = \grave{A}_{365}^{40} / 40^{365}$.

Пример 4. Из 15 строительных рабочих 10 – штукатуры, а 5 – маляры. Наудачу отбирается бригада из 5 рабочих. Какова вероятность того, что среди них будет 3 маляра и 2 штукатура?

Решение: Пространство элементарных событий состоит из всех выборок различного состава объема 5 из множества объема 15. Число таких выборок равно $\tilde{N}_{15}^{5}$. Благоприятным событиям соответствуют выборки, содержащие трех маляров и двух штукатуров. Трех маляров из пяти можно выбрать $\tilde{N}_5^3$ способами, а двух штукатуров (совершенно независимо от предыдущего выбора) $\tilde{N}_{10}^2$ способами.

Следовательно, число выборок, соответствующих благоприятным событиям, равно произведению $\tilde{N}_5^3\tilde{N}_{10}^5$. Таким образом, искомая вероятность определяется выражением $Ð(\grave{A}) = \tilde{N}_5^3\tilde{N}_{10}^2 / C_{15}^5$.

Ответ: $Ð(\grave{A}) = \tilde{N}_5^3\tilde{N}_{10}^2 / C_{15}^5$.

Вычисление вероятностей сложных событий.

События подразделяются на достоверные, невозможные и случайные: Достоверные в результате опыта происходят всегда; невозможные не происходят никогда; случайные могут либо произойти, либо нет. Достоверным будет, например событие, состоящее в том, что из урны, содержащей только белые шары, вынимают белый шар, а невозможным будет событие, состоящее в том, что белый шар вынимают из урны, содержащей только черные шары. Если в урне есть и белые, и черные шары, то извлечение шара какого-либо определенного цвета является случайным событием.

Достоверное событие совпадает со всем пространством элементарных событий Ω, а случайное событие А является некоторым подмножеством в этом пространстве. Невозможное событие ∩ не содержит ни одного элементарного события.

Суммой двух событий *А* и *В* назовем событие С, состоящее в том, что произошло или событие А, или событие *В*. Сумма двух событий обозначается

$$C=A + B.$$

Поясним понятие суммы двух событий на следующем примере. Пусть мальчик купил билеты двух лотерей: «Спринт» и «Старт». Рассмотрим случайное событие С, состоящее в том, что мальчик выигрывает хотя бы в одной лотерее. Наступление этого события связано с наступлением хотя бы одного из следующих событий: событие- *А* -среди билетов, купленных мальчиком, есть выигрышные билеты лотереи «Спринт»; *В* — есть выигрышные билеты лотереи «Старт».

Произведением двух событий *А* и *В* назовем событие С, состоящее в том, что произошли оба эти события. Произведение двух событий, обозначается

$$\mathbf{C=A \cdot B.}$$

События А и В называются *несовместными,* если их произведение представляет собой невозможное событие:

$$A \bullet B = \cap.$$

Поясним понятие произведения двух событий на следующем примере.

Среди машин, потерпевших аварию, есть «Жигули» и «Волги». Часть машин при аварии перевернулась. Событие А, состоящее в том, что наудачу выбранная неперевернувшаяся автомашина «Волга», будет произведением двух событий: B — машина не перевернулась и С — машина является «Волгой», т. е. $A = = B \cdot C$.

Определение вероятности сложного события *А,* являющегося комбинацией более простых событий $A_1, \ldots$, A_k, вероятности которых известны, основаны на формулах сложения и умножения вероятностей. Поясним смысл этих формул примерами.

Проведем эксперимент, связанный с бросанием двух костей, и вычислим вероятность события С, состоящего в том, что сумма очков на выпавших гранях не превосходит числа 3. Пространство элементарных событий, возникающих в результате этого эксперимента, можно представить упорядоченными парами целых чисел, изменяющихся от 1 до 6. Таких пар будет 36. Среди этих событий благоприятными событию C будут следующие: (1, 1), (1, 2), (2, 1). Таким образом, согласно определению, заключаем, что вероятность события C есть

$$P\ (C) = 3/36 = 1/12.$$

Рассмотрим теперь событие С как комбинацию более простых событий. Для этого заметим, что событие *С* происходит, если происходит событие *А* — сумма очков на выпавших гранях равна 2, или событие B — сумма очков на выпавших гранях равна 3. Таким образом, событие *С* есть сумма событий *А к В: С — А + В.* Из исходного пространства элементарных событий событию *А* благоприятна только пара (1, 1), а событию B — пары (1, 2) и (2, 1). Следовательно, вероятности событий А и В равны соответственно

$$P\ (A) = 1/36, \qquad P\ (B) = 1/18.$$

Таким образом, в данном случае справедливо равенство $P(C) = P\ (A) + P\ (B)$.

Заметим, что события А и В в этом примере являются несовместными (сумма очков на выпавших гранях не может одновременно быть равной 2 и 3).

Вычислим вероятность события С, состоящего в том, что из колоды карт в 52 листа наудачу взятая карта или является тузом, или имеет червонную часть. Пространство элементарных событий в этом примере состоит из 52 элементов. Элементарные события, благоприятные событию С, заключаются в том, что взятая карта имеет червонную масть (в колоде 13 карт одной масти) или является тузом (в колоде 4 туза), С учетом того, что один из тузов червонный и, следовательно, благоприятным оказываются 16 элементарных событий, получаем

$P(C) = 16/52 = 4/13$.

Представим теперь *C* в виде комбинации более простых событий: события A — взятая наудачу карта оказалась червонном, и события B — взятая наудачу карта оказалась тузом. Тогда по определению суммы двух событий $C = A + B$, Вероятности событий A и B соответственно равны

$p(A) = 1/4$, $P(B) = 1/13$.

Нам понадобится также вероятность произведения событий *A* и B, т.е. события $D = A\cdot B$, которое заключается в том, что наудачу взятой картой оказывается червонный туз. Очевидно, что вероятность события *D* равна

$p(D) = 1/52$. Нетрудно убедиться, что в данном случае справедливо равенство

Рассмотренные примеры обобщает следующая формула:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB),$$

т. е. вероятность суммы двух событий A и B равна сумме вероятностей этих событий минус вероятность их произведения.

В том случае, если события A и B несовместны, формула принимает вид

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Рассмотрим эксперимент, связанный с бросанием двух костей, и вычислим вероятность события *C*, состоящего в том, что число очков, выпавших на первой кости, больше 3, а на второй — больше 4. Элементарные события, благоприятные событию *C*, — упорядоченные пары чисел: (4, 5), (4, 6), (5, 5), (5, 6), (6, 5), (6, 6). Таким образом,

$P(C) = 6/36 = 1/6$.

Представим теперь событие *C* в виде комбинации более простых событий: события A, состоящего в том, что на первой кости выпало больше трех очков, и события *B* — на второй кости выпало больше четырех очков. Тогда по определению произведения событий событие *C* представляется произведением событий A и *B*: $C = A\cdot B$.

Вычислим вероятности событий *A* и *B*. Прежде всего заметим, что пространства элементарных событий, возникающие при бросании каждой кости отдельно, состоят из шести равновозможных исходов. Элементарные события, благоприятные событию *A*, состоят в выпадении на первой кости 4, 5 или 6 очков. Следовательно, $P(B) = 1/2$.

Элементарные события, благоприятные событию B, состоят в выпадении на второй кости 5 или 6 очков. Следовательно, $P(B) = 1/3$. Нетрудно проверить, что в данном случае выполняется соотношение

P(C)=P(A)·P(B).

События A и $B,$ для которых выполняется данная формула, будем называть *независимыми.* Таким образом, вероятность произведения двух событий в том случае, если они независимы, можно вычислить по формуле. Если для событий А и В условие данное формулы не выполняется, то такие события называются *зависимыми.* В этом случае можно говорить о так называемой условной вероятности наступления события A при условии, что событие В произошло.

Допустим, требуется вычислить вероятность события $A,$ состоящего в том, что сумма очков при бросании двух костей не превысит четырех, если известно, что на одной кости выпала единица (событие В). Так как событие В произошло, то, считая его достоверным, можно рассмотреть новое пространство элементарных событий, состоящее из 11 событий, благоприятных событию В:

(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (3, 1), (4,1), (5, 1), (6, 1).

В этом новом пространстве элементарных событий событию А благоприятны 5 элементарных событий: (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (3, 1). Таким образом, вероятность события A в этом пространстве элементарных событий равна 5/11. Полученную величину будем называть *условной вероятностью* события А при условии, что произошло событие В, и обозначать $P(A/B)$.

Рассмотрим теперь исходное пространство элементарных событий, возникающее при бросании двух костей, и вычислим вероятность события $C = A·B,$ состоящего в том, что сумма очков, выпавших на костях, не превосходит четырех и что на одной из костей выпала единица, Элементарные события, благоприятные событию С, представляются следующими парами чисел: (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (3, 1). Таким образом, $P(C)$ = 5/36. Одиннадцать элементарных событий, благоприятных событию В, были рассмотрены выше. Следовательно, $P(B)$ = 11/36. Нетрудно убедиться в справедливости соотношения

P (С) = $P\ (A/B) \cdot P$ (В).

Рассмотренные примеры обобщает следующая формула умножения вероятностей:

$$P(AB) = P(A)P\ (B/A) = P\ (B)\ P\ (A/B), \quad (6)$$

т. е. вероятность произведения двух событий А и В равна произведению вероятности одного из этих событий на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие произошло.

Для случая трех событий формула, обобщающая формулу (6), имеет вид

$$P\ (ABC) — P\ (A/BC)\ P\ (BC) = P\ (A/BC)\ P\ (B/C)\ P\ (C). \quad (7)$$

П р и м е р Из урны, содержащей n белых и т черных шаров, вынимаются два шара.

Какова вероятность того, что они разных цветов?

Решение. Представим событие *C,* состоящее в том, что вынутые шары разных цветов, в виде *C = A + B,* где событие *A* состоит в том, что первый шар белый, а второй черный; событие B — в том, что первый шаг черный, а второй белый. Так как события A и B несовместны, то, согласно (4),

$$P(C) = P(A) + P(B). \qquad (*)$$

Вероятности событий *A* и B вычислим, используя формулу (6). Представим событие *A* в виде A = Б, Ч, где буквы Б и Ч, записанные в данной последовательности, означают, что первым был вынут белый шар, а вторым — черный. Тогда

$P(A) = P$ (Б) P (Ч/Б).

Вероятность события Б представляет собой отношение числа белых шаров к числу всех шаров, находящихся в урне. Условная вероятность того, что вторым вынут черный шар при условии, что первым был вынут белый, представляет собой отношение первоначального числа черных шаров к уменьшившемуся на единицу числу всех шаров, оставшихся в урне. Таким образом,

$$P(A) = \frac{n}{m+m} \cdot \frac{m}{n+m-1}.$$

Аналогично $P(B) = \frac{m}{n+m} \cdot \frac{n}{n+m-1}$.

Подставляя полученные выражения в формулу(*), получаем $P(C) = \frac{2nm}{(n+m)(n+m-1)}$.

Ответ: $P(C) = \frac{2nm}{(n+m)(n+m-1)}$.

Пример. Для разрушения моста достаточно попадания одной авиационной бомбы. Найти вероятность разрушения, если на мост сбрасывают три бомбы с вероятным попаданием 0,3;0,4;0,7 соответственно.

Решение: Вычислим вероятность события $\overline{A}$, состоящего в том, что мост не будет разрушен. Обозначим $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \overline{A_3}$ события, состоящие в том, что в мост не попала соответственно первая, вторая и третья бомбы. Тогда $\overline{A} = \overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}$. Так как из независимости A$_1$ следует независимость $\overline{A_1}$, то

$$P(\overline{A}) = P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3}) = 0{,}3 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}7 = 0{,}084.$$

Следовательно, вероятность разрушения моста

P(A)=1- $\text{Ð}(\overline{A})$ =0,916.

Ответ: 0,916.

Пример. В первой команде 6 мастеров спорта и 4 перворазрядника, а во второй – 6 перворазрядников и 4 мастера спорта. Сборная, составленная из игроков первой и второй команд, содержит 10 человек: 6 человек из первой команды и четыре из второй. Из сборной команды наудачу выбирается один спортсмен. Какова вероятность, что он мастер спорта?

Решение: Пусть событие B_i (i=1,2) состоит в том, что наудачу выбранный спортсмен-член i-й команды. Тогда вероятности событий B_i равны соответственно $P(B_1)=3/5$, $P(B_2)=2/5$. Пусть событие A состоит в том, что наудачу выбранный спортсмен мастер спорта. Тогда условие вероятности события A при условии, что выполнено событие B_i (то есть известно из какой команды спортсмен), равны соответственно $P(A/B_1)=3/5$, $P(A/B_2)=2/5$. Используя формулу вероятности, получаем

$$\text{Ð}(\text{À}) = \frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}+\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}=\frac{13}{25}.$$

Ответ: 13/25

Применение комбинаторики в других науках.

Комбинаторика в биологии

Сложность строения биологических систем, их строгая иерархичность, взаимослаженность отдельных процессов в целом организме делают биологию благодарным полем для приложения комбинаторных методов. Советский биолог А. А. Любищев полагал даже, что сходство растений и морозных узоров на окнах не случайно — в обоих случаях проявляются определенные законы комбинирования частей в единое целое.

Замечательным открытием биологии XX века была разгадка генетического кода. Удалось выяснить, каким образом наследственная информация передается потомству. Оказалось, что эта информация записана в молекулах дезоксирибонуклеиновон кислоты

(ДНК). Различные молекулы ДНК отличаются друг от друга тем, в каком порядке идут в них 4 азотистых основания: аденин, тимин, гуанин и цитозин. Эти основания определяют порядок построения белков организма из двух десятков аминокислот, причем каждая аминокислота зашифрована кодом из трех азотистых оснований.

В одной хромосоме содержится несколько десятков миллионов азотистых оснований. Число различных комбинаций, в которых они могут идти друг за другом, невообразимо велико. Ничтожной доли этих комбинаций достаточно было, чтобы обеспечить все разнообразие живой природы за время существования жизни на Земле.

Сочетая комбинаторные рассмотрения с изучением рентгеновских снимков, ученым удалось разгадать строение многих белков, в частности гемоглобина, инсулина и др. Торжеством комбинаторного подхода к явлениям жизни можно считать расшифровку строения дезоксирибонуклеиновой кислоты (ДНК), сделанную в Кембридже Ф. Криком и Дж Уотсоном в 1953Вопрос состоял в том, как соединены между собой нуклеотиды и как это соединение объясняет генетические свойства ДНК. А это уже был вопрос, связанный с комбинаторикой. По аналогии с ранее изученным строением белков возникла идея о спиральной структуре ДНК.

Комбинаторика в химии.

Комбинаторика полезна не только в биологии, но и в химии.

Немного найдется дней в истории науки, сравнимых, но своему значению с 17 февраля 1869 г. В этот день из хаоса химических элементов, каждый из которых имел свои свойства, возникла стройная таблица — был открыт периодический закон.

Но не только в открытии периодической системы элементов оказалась полезна комбинаторика. Как известно, среди органических соединений встречаются изомеры, т. е. соединения, плюющие один и тот же состав, но разное строение. Комбинаторика дала возможность перечислить изомеры данного состава.

Комбинаторика в физике.

В физике комбинаторика оказывается необходимой при изучении свойств кристаллов, описании модели ферромагнетизма и при изучение движения частиц, например, Броуновское движение, совершаемое частицами под действие ударов молекул.

В качестве примера Броуновского движения рассмотрим частицы, которые могут передвигаться только по прямой линии. Так как удары молекул носят случайный характер, то в первом приближении можно считать, что за единицу времени половина частиц сместится на 1/2 единицы длины вправо, а половина — на

1/2 единицы длины влево (па самом деле процесс значительно сложнее, так как возможны передвижения на отрезки различной длины). Поэтому если взять 2N частиц, находя- находящихся в момент времени 1 = 0 в точке 0, через N часов частицы окажутся в точках Bh (к — N12), О < к < N (точка О — начало отсчета). При этом в точку Bh придет C_N^k. частиц.

Такое распространение частиц в физике называют диффузией.

Комбинаторика в информатике.

При передаче сообщений по телеграфу используют различные коды, позволяющие представлять буквы, цифры и знаки препинания в виде кортежей из точек и тире. Первый такой код был предложен в 1838 г. изобретателем электрического телеграфа американцем Морзе. В этом коде число символов для каждой буквы различно. Для букв, которые встречаются часто, выбираются коды с малым числом символов, а для редко встречающихся букв с большим числом символов. Например, буква «е» пере-

передается одной точкой, а редко встречающаяся буква «э» набором из 5 символов. Это позволяет экономно передать текст, используя символы . и—• Морзе не утруждал себя глубокими исследованиями, чтобы подсчитать относительную частоту, с которой встречаются буквы в английских текстах — он просто пошел в ближайшую

типографию и подсчитал число литер в наборных кассах.

Лишь в 40-х годах XX в. американский ученый Клод Шеннон построил теорию информации, и на ее основе рассчитал, какой же код окажется самым выгодным; для этого ему пришлось учитывать не только частоту, с которой встречаются отдельные буквы, но и частоты сочетаний букв по две, по три и т. д. Откуда же в коде Морзе взялось число 5? Почему нельзя передавать сообщения, используя лишь комбинации точек и тире, содержащие не более 4 знаков? Ответ на этот вопрос дает формула для размещений с повторениями. Из нее вытекает, что из точки и тире можно построить лишь два кортежа длины один (это, конечно, ясно и без всяких формул). Далее, из тех же знаков можно построить 22 кортежа длины $2,2^3$ кортежа длины 3, 2^4 кортежа длины 4. Общее число букв, которые можно передать кортежами точек и тире, имеющими длину от 1 до 4, равно 2+4+8+16, т. е. 30. А в русском алфавите 33 буквы, да еще надо передавать цифры и знаки препинания. Ясно, что кортежей длины от 1 до 4 не хватает, надо брать еще кортежи длины 5 — тогда получается 62 кортежа, чего

вполне достаточно для передачи всех букв, цифр и т. д.

Комбинаторика в языках.

Лингвистам — специалистам по живым и мертвым языкам, часто приходится разгадывать надписи, сделанные на незнакомых языках. Предположим, что им попался текст, написанный при помощи 26 незнакомых знаков. Эти знаки являются буквами, изображающими каждый один из 26 звуков. Сколькими способами можно сопоставить звуки знакам письма?

Расположим знаки письма в некотором порядке. Тогда каждый способ сопоставления даст некоторую перестановку звуков. Но из 26 звуков можно составить P26=26! перестановок. А это число приблизительно равно 4-1026.

Далее подсчитывают частоту появления отдельных знаков. Сравнивая эту частоту с частотой появления букв в близких к данному языках, можно примерно угадать значения некоторых знаков. Другие знаки удается найти, сравнив данный текст с тем же текстом на ином языке (древние цари любили вещать о своих «подвигах» на нескольких языках).

С аналогичными трудностями встречаются и криптологи — специалисты по расшифровке кодов.

Литература:

1.Балк М.Б., Банк Г.Д. Математика после уроков. Москва: Просвещение, 1971. - 462 с.

2.Башмаков М.И., Беккер В.М., Гольховой В.М. Задачи по математике. Москва: Наука, 1982. - 192 с.

3.Бутузов В.Ф. и другие. Математика. Учебное пособие для 11 класса общеобразовательных учреждений. Москва: Просвещение, 1996. - 207 с.

4.Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. Москва: Высшая школа, 1997.-479 с.

5.Гусев В.А. и другие. Внеклассная работа по математике в 6 - 8 классах. Москва: Просвещение, 1977. - 288 с.

6.Лютикас В.С. Факультативный курс по математике «Теория вероятностей» для 9-11 классов. Москва: Просвещение, 1990. - 160 с.

7.Мордкович А.Г., Семёнов П.В. Алгебра и начала анализа. Учебник для общеобразовательных учреждений (профильный уровень). Москва: Мнемозина, 2006. — 408 с.

8.Колмогоров А.Н. Алгебра и начала анализа. Учебное пособие для 9 класса. Москва: Просвещение, 1977. – 324с.

9.Газета «Математика», №7, №15, №17, 2004.